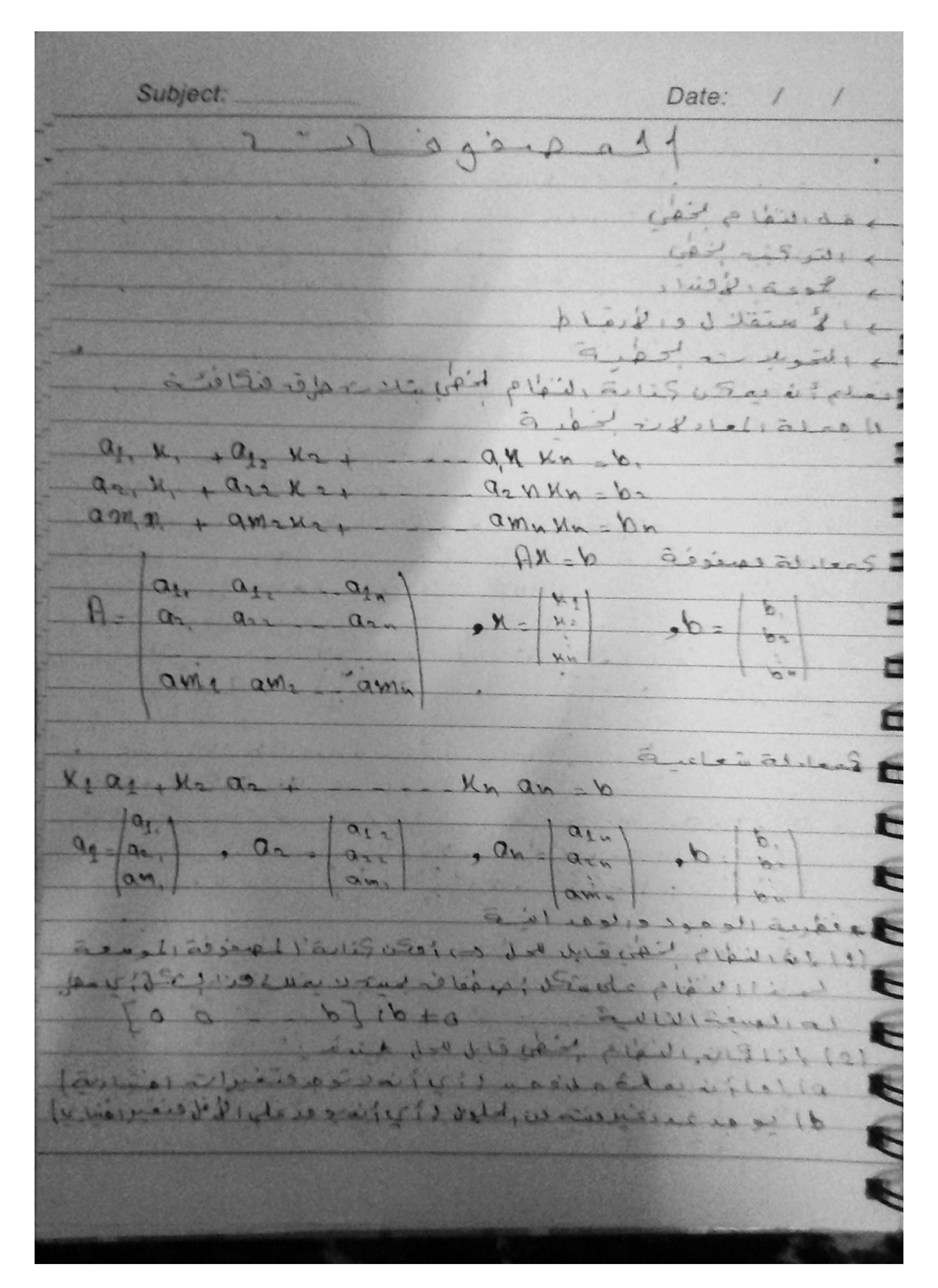


Subject: .... Date: / /

المصفوفات

- حل النظام الخطي
- التركيب الخطي
- مجموعة الإنشاء
- الاستقلال والارتباط
- التحويلات الخطية

نعلم أنه يمكن كتابة النظام الخطي بثلاث طرق متكافئة

1) المعادلة العادية الخطية

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

كمعادلة مصفوفية $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ am_1 & am_2 & \cdots & am_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

كمعادلة متجهية

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ am_1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ am_2 \end{pmatrix}, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ am_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نظرية الوجود والوحدانية

(1) إذا كان النظام الخطي قابل للحل ← إذا لم تكن كتابة المصفوفة الموسعة لهذا النظام على شكل درجي صفي لا يحتوي على صف من الشكل

$[0 \quad 0 \quad \cdots \quad b] ; b \neq 0$

(2) إذا كان النظام الخطي قابل للحل فإنه:

a) إما أن يملك حل وحيد إذا لم يوجد متغيرات (حرة)

b) يوجد عدد لا نهائي من الحلول إذا وجد على الأقل متغير حر واحد

Subject: .... Date: / /

* شكل المصفوفة النموذجي

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) كل الأسطر الغير صفرية تقع فوق الأسطر الصفرية

(2) كل عنصر ارتكاز يقع إلى يمين عنصر الارتكاز السابق الواقع في السطر الأعلى

(3) كل العناصر الواقعة تحت المحور الرئيسي هي مساوية للصفر

* العنصر الارتكازي في كل سطر غير صفري هو الواحد

4) كل عنصر ارتكاز مساوي للواحد هو العنصر الغير صفري الوحيد في عموده المحوري

دعمت الموقعة بالنظم الخطية

- التركيب الخطي

ليكن لدينا مجموعة من الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}$

ولتكن $c_1, c_2, \dots, c_p$ قيم سلمية عندئذ يسمى

الشعاع y المعطى بالعلاقة $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p$

تركيباً خطياً للأشعة

$v_1, v_2, \dots, v_p$ بدلالة القيم المعطاة (الأوزان) $c_1, c_2, \dots, c_p$

Ex: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

حدد فيما إذا b هو عبارة عن تركيب خطي للأشعة a_1, a_2, a_3 ؟ $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

الحل: حسب التعريف لدينا $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \stackrel{?}{=} b$

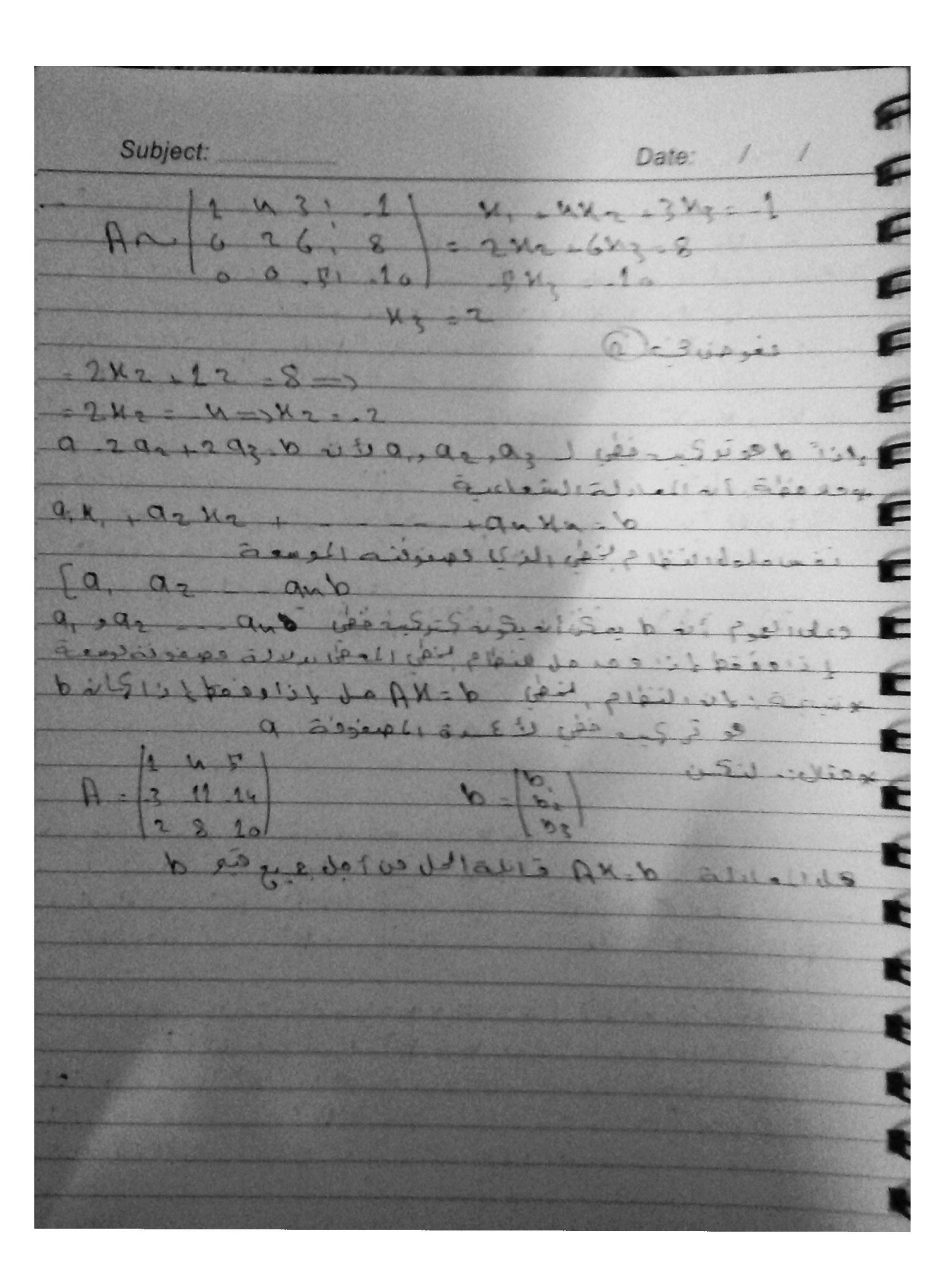
نبحث عن الثوابت x_1, x_2, x_3 التي تحقق العلاقة السابقة وهذا يكافئ

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 0 + 2x_2 + 6x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 14x_2 + 10x_3 &= -5 \end{aligned} \Longrightarrow A \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{array}\right)$$

$$-3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3 \qquad A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \qquad -R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$



Subject: .... Date: / /

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 6x_3 &= 8 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned}$$

$$x_3 = 2$$

نعوض في ② :

$2x_2 + 12 = 8 \Rightarrow$

$2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -2$

إذا b هو تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3 لأن $a_1 - 2a_2 + 2a_3 = b$

ويمكن كتابة المعادلة المتجهية

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

لها نفس حلول النظام الخطي الذي مصفوفته الموسعة

$[a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n \; b]$

بشكل عام إن b يمكن أن يكون تركيب خطي من $a_1, a_2, \dots, a_n$

إذا وفقط إذا وجد حل للنظام الخطي الذي مصفوفته الموسعة

مبرهنة: إن النظام الخطي $Ax = b$ له حل إذا وفقط إذا كان b

هو تركيب خطي لأعمدة المصفوفة a

مثال: لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 11 & 14 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

هل المعادلة $Ax = b$ قابلة للحل من أجل جميع قيم b